# SUR LE MOUVEMENT D'UNE PARTICULE DANS LE CHAMP D'UN NOYAU CHARGÉ

PAR

K. OGURA

[EXTRAIT DU "JAPANESE JOURNAL OF PHYSICS," TOME III. N° 4-6, 1924]

## 6. *Sur le Mouvement d'une Particule dans le Champ d'un Noyau chargé*[1].

Par Kinnosuke OGURA.

(Contribution de l'Institut Shiomi, Osaka. Lu devant la Société Physico-Mathématique du Japon, 1er avril, 1923.)

**1.** MM. Nordström et Jeffery[2] ont trouvé l'expression de l'intervalle élémentaire autour d'un noyau chargé :

$$ds^2 = c^2 f^2 dt^2 - \frac{1}{f^2} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2, \tag{1}$$

où

$$f^2 = 1 - \frac{2kM}{c^2 r} + \frac{kE^2}{c^4 r^2},$$

$k$ étant la constante de gravitation, $M$ la masse et $E$ la charge.

M. Jeffery a étudié encore le mouvement d'un électron dans ce champ, en supposant que la masse $m$ (au repos à l'infini) et la charge $-e$ de cet électron sont très petites. D'après lui, les équations du mouvement dans le plan $\theta = \frac{\pi}{2}$ sont

$$\frac{d^2 r}{ds^2} - \frac{f'}{f}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - rf^2\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 + c^2 f^3 f'\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = -\frac{Eef^2}{cmr^2}\frac{dt}{ds}, \tag{2}$$

$$\frac{d}{ds}\left(r^2 \frac{d\phi}{ds}\right) = 0, \tag{3}$$

$$f^2 \frac{dt}{ds} = \frac{r(W + mc^2) + Ee}{mc^3 r}, \tag{4}$$

$f'$ désignant $\frac{df}{dr}$ et $W$ une constante.

Posons maintenant

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r}, \qquad \frac{d^2 r}{dt^2} = \ddot{r}, \qquad \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi},$$

---

(1) Pour quelques-uns des résultats de cette Note, voir K. Ogura, C. R., **173** (1921), 348, 407.

(2) G. Nordström, Proc. Acad. Amsterdam, **20** (1918), 1236 ; G. B. Jeffery, Proc. Roy. Soc., A. **99** (1921), 123. Voir aussi H. Weyl, 'Raum, Zeit, Materie,' 4e éd. (1921), 236.

$$P=\frac{r(W+mc^2)+Ee}{mc^2 r}, \quad \frac{dP}{dr}=P'.$$

On a alors, de (1),

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=c^2 f^2-\frac{1}{f^2}\dot{r}^2-r^2\dot{\phi}^2.$$

Puisque (4) peut s'écrire

$$f^2\frac{dt}{ds}=\frac{P}{c}, \tag{6}$$

on trouve

$$\frac{dt}{ds}=\frac{P}{cf^2}, \qquad \frac{d\phi}{ds}=\frac{P}{cf^2}\dot{\phi}, \qquad \frac{dr}{ds}=\frac{P}{cf^2}\dot{r},$$

$$\frac{d^2r}{ds^2}=\frac{P^2}{c^2f^4}\ddot{r}+\frac{P(P'f-2Pf')}{c^2f^5}\dot{r}^2.$$

Donc, en éliminant $s$ des équations (2), (3) et (4), nous avons

$$m\left(\frac{P}{f^4}\ddot{r}+\frac{fP'-3Pf'}{f^5}\dot{r}^2-\frac{Pr}{f^2}\dot{\phi}^2\right)=-mc^2\frac{Pf'}{f}-\frac{Ee}{r^2}, \tag{7}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{Pr^2}{f^2}\dot{\phi}\right)=0, \tag{8}$$

*équations du mouvement de l'électron dans le plan* $\theta=\frac{\pi}{2}$.

**2.** Prenons maintenant

$$v^2=\frac{1}{f^2}\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}, \tag{9}$$

$$V=-\frac{Ee}{r}+mc^2(f-1), \tag{10}$$

$$T_1=mc^2\left(\frac{f^2}{\sqrt{f^2-\frac{v^2}{c^2}}}-f\right), \tag{11}$$

$$T_2=mc^2\left(f-\sqrt{f^2-\frac{v^2}{c^2}}\right) \tag{12}$$

et appelons $v$ la *vitesse de l'électron*, $V$ *l'énergie potentielle*, $T_1$ *l'énergie cinétique de la première espèce* et $T_2$ *celle de la seconde espèce* (ou bien $T_1$ *l'énergie cinétique* et $T_2$ *le potentiel cinétique*), comme dans ma Note



"Dynamique du point dans le champ statique de gravitation[1]."

Lorsque la vitesse $v$ est faible et la variable $r$ assez grande, on trouve

$$V=-\frac{Ee}{r}-k\frac{Mm}{r}+\cdots,$$

$$T_1=\frac{1}{2}mv^2+k\frac{Mm}{c^2}\frac{v^2}{r}+\cdots,$$

$$T_2=\frac{1}{2}mv^2-k\frac{Mm}{c^2}\frac{v^2}{r}+\cdots,$$

formules qui donnent, en première approximation, les expressions habituelles des énergies.

Des équations (10) et (11), nous avons

$$\begin{aligned} V+T_1&=\frac{mc^2f^2}{\sqrt{f^2-\frac{v^2}{c^2}}}-\frac{Ee}{r}-mc^2 \\ &=mc^3f^2\frac{dt}{ds}-\frac{Ee}{r}-mc^2 \\ &=mc^2P-\frac{Ee}{r}-mc^2 \\ &=W \end{aligned}$$

en tenant compte de (9), (5), (6) et la définition de $P$. On a donc

$$V+T_1=W. \tag{13}$$

C'est le *théorème d'énergie*.

Si je prends comme *masse de l'électron* la quantité définie par

$$[m]=\frac{m}{\sqrt{f^2-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{14}$$

il est facile de montrer les formules suivantes :

$$T_1+T_2=[m]\,v^2 \text{ [2]}, \tag{15}$$

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{[m]_{v=0}}{[m]}, \tag{16}$$

$$[m]-[m]_{v=0}=\frac{T_1}{[c]^2}, \tag{17}$$

où $[c](=cf)$ désigne la *vitesse de la lumière*.

(1) K. Ogura, Jap. J. Phys., **3** (1923), 75.

(2) Au cas de la relativité restreinte, on trouve cette relation dans N. Bohr, 'Abhandlungen über Atombau aus den Jahren 1913-1916' (1921), 132.

**3.** Si l'on introduit la *fonction de Lagrange généralisée* définie par

$$L=T_2-V$$
$$=mc^2+\frac{Ee}{r}-mc^2\left(f^2-\frac{1}{c^2f^2}\dot r^2-\frac{r^2}{c^2}\dot\phi^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (18)$$

on a les *équations de Lagrange généralisées* :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=0, \qquad (19)_1$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot \phi}\right)-\frac{\partial L}{\partial \phi}=0. \qquad (19)_2$$

Car, nous obtenons, de la définition (18),

$$\frac{\partial L}{\partial \phi}=0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot\phi}=mr^2\,\dot\phi\left(f^2-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{mr^2P}{f^2}\,\dot\phi.$$

Donc l'équation du mouvement (8) devient $(19)_2$.

Ensuite nous avons

$$\frac{\partial L}{\partial \dot r}=\frac{m}{f^2}\dot r\left(f^2-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{mP}{f^4}\,\dot r,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right)=\frac{mP}{f^4}\ddot r+m\left(\frac{P'}{f^4}-4\frac{Pf'}{f^5}\right)\dot r^2$$

et

$$\frac{\partial L}{\partial r}=-\frac{Ee}{r^2}-\frac{mc^2}{2}\left(f^2-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(f^2-\frac{v^2}{c^2}\right)$$
$$=-\frac{Ee}{r^2}-\frac{mc^2P}{2f^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(f^2-\frac{1}{c^2f^2}\dot r^2-\frac{r^2}{2}\dot\phi^2\right)$$
$$=-\frac{Ee}{r^2}-\frac{mc^2Pf'}{f}+\frac{mPr}{f^2}\dot\phi^2-\frac{mPf'}{f^5}\dot r^2.$$

Par conséquent, l'équation (7) nous donne $(19)_1$.

D'après le théorème bien connu du calcul des variations, il suit, des équations $(19)_1$ et $(19)_2$, que le *principe d'Hamilton généralisé* est valable dans notre cas, à savoir :

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}L\,dt=0, \qquad (20)$$

$t_0$, $t_1$ étant deux valeurs données.



**4.** Définissons maintenant les *composantes de la quantité de mouvement* par

$$p_r=\frac{\partial T_2}{\partial \dot r}, \qquad p_\phi=\frac{\partial T_2}{\partial \dot\phi}. \qquad (21)$$

Nous avons alors

$$p_r=[m]\,\frac{\dot r}{f^2}, \qquad p_\phi=[m]\,r^2\,\dot\phi\,; \qquad (22)$$

puis

$$\dot r\,p_r+\dot\phi\,p_\phi=[m]\,v^2=T_1+T_2.$$

En intégran cette équation, nous obtenons

$$\int p_r\,dr+p_\phi\,d\phi=\int[m]\,v^2\,dt,$$

ou

$$\int p_r\,dr+p_\phi\,d\phi=\int(T_1+T_2)\,dt. \qquad (23)$$

*C'est la relation fondamentale pour l'intégrale d'action généralisée*

$$S=\int(T_1+T_2)\,dt. \qquad (2$$

M. Bohr a déjà employé cette intégrale dans le cas de la relativité restreinte[1].

D'après cette définition, nous avons

$$\frac{\partial S}{\partial r}=p_r, \qquad \frac{\partial S}{\partial \phi}=p_\phi. \qquad (25)$$

Finalements, si $H(r,\,\phi,\,p_r,\,p_\phi)$ désigne la *fonction d'Hamilton*, c'est-à-dire

$$H=V(r)+T_1(r,\,\phi,\,p_r,\,p_\phi)^{(2)}, \qquad (26)$$

il est facile d'établir la formule

$$\dot r\,\frac{\partial L}{\partial \dot r}+\dot\phi\,\frac{\partial L}{\partial\dot\phi}-L=H \qquad (27)$$

et les *équations canoniques d'Hamilton généralisées* :

$$\frac{dr}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_r}, \qquad \frac{d\phi}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_\phi},$$
$$\frac{dp_r}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial r}, \qquad \frac{dp_\phi}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \phi}\,(=0). \qquad (28)$$

(1) N. Bohr, ibid, 132.

(2) Dans ce cas $H$ et $T_1$ ne dépendent pas de $\phi$.

## Application à la théorie des quanta.

**5.** Je vais d'abord démontrer le théorème suivant :

*L'intégrale de l'action*

$$S=\int (T_1+T_2)\,dt$$

*est un invariant adiabatique, si les paramètres variables* $a_1$, $a_2$, $\cdots$ *figurent dans l'expression de l'énergie potentielle, mais pas dans celle de* $T_1$ *ni dans celle de* $T_2$.

Le mouvement de l'électron autour d'un noyau n'est par rigoureusement périodique, mais quasi-périodique. On sera donc justifié de raisonner sur une période approchée.

Je suivrai le raisonnement de M. Ehrenfest(1). Comparons le mouvement avant la variation ayant une période complète étendue de $t=t_0$ jusqu'à $t=t_1$ avec le mouvement après la variation ayant une période complète étendue de $t=t_0+\Delta t_0$ jusqu'à $t=t_1+\Delta t_1$. L'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} L\,dt$$

devient alors

$$\int_{t_0}^{t_1} L\,dt+\Delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt,$$

où

$$\Delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt=\sum_i\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial a_i}\delta a_i\,dt+\left(L-\dot r\frac{\partial L}{\partial \dot r}-\dot\phi\frac{\partial L}{\partial\dot\phi}\right)_{t=t_1}\Delta t_1$$
$$-\left(L-\dot r\frac{\partial L}{\partial \dot r}-\dot\phi\frac{\partial L}{\partial\dot\phi}\right)_{t=t_0}\Delta t_0\,^{(2)}. \qquad (29)$$

Si l'on remarque que $T_1$ ni $T_2$ ne contient les paramètres $a_1$, $a_2$, $\cdots$, des relations

$$L=T_2-V, \qquad H=T_1+V,$$

il suit que

$$\frac{\partial L}{\partial a_i}=-\frac{\partial V}{\partial a_i}=-\frac{\partial H}{\partial a_i}.$$

De (29) et (26), on a donc

$$\Delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt=-\sum_i\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial H}{\partial a_i}\delta a_i\,dt-H_{(t=t_1)}\Delta t_1+H_{(t=t_0)}\Delta t_0.$$

(1) P. Ehrenfest, Verslag Amsterdam Acad., **25** (1916), 412. Voir aussi J. H. Jeans, 'Dynamical theory of gases,' 3e éd. (1921), 409.

(2) Jeans, ibid, 441.



D'autre part, on obtient

$$\Delta\int_{t_0}^{t_1} H\,dt=\sum_i\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial H}{\partial a_i}\delta a_i\,dt+H_{(t=t_1)}\Delta t-H_{(t=t_0)}\Delta t_0.$$

Par conséquent

$$\Delta\int_{t_0}^{t_1}(L+H)\,dt=0,$$

d'où nous déduisons

$$\Delta\int_{t_0}^{t_1}(T_1+T_2)\,dt=0,$$

ce qui montre que $\int_{t_0}^{t_1}(T_1+T_2)\,dt$ est un invariant adiabatique.

**6.** Pour trouver l'équation différentielle d'Hamilton-Jacobi, je considère les relations suivantes :

$$\dot r=\frac{f^2}{[m]}p_r, \qquad \dot\phi=\frac{1}{[m]r^2}p_\Phi.$$
$$v^2=\frac{\dot r^2}{f^2}+r^2\dot\phi^2, \qquad [m]^2=\frac{m^2}{f^2-\dfrac{v^2}{c^2}};$$

d'où

$$\frac{v^2}{f^2-\dfrac{v^2}{c^2}}=\frac{1}{m^2}\left(f^2p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\Phi^2\right).$$

On a donc

$$1+\frac{1}{m^2c^2}\left(f^2p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\Phi^2\right)=1+\frac{\dfrac{v^2}{c^2f^2}}{1-\dfrac{v^2}{c^2f^2}}=\frac{f^2}{f^2-\dfrac{v^2}{c^2}}.$$

D'autre part, on a

$$W=-\frac{Ee}{r}+mc^2\left(\frac{f^2}{\sqrt{f^2-\dfrac{v^2}{c^2}}}-1\right).$$

Par conséquent

$$f^2\left[1+\frac{1}{m^2c^2}\left(f^2p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\Phi^2\right)\right]=\left[1+\frac{1}{mc^2}\left(W+\frac{Ee}{r}\right)\right]^2.$$

Nous avons donc, d'après (25), l'*équation d'Hamilton-Jacobi* :

$$f^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2=m^2c^2\left[\frac{1}{f^2}\left(1+\frac{W+\dfrac{Ee}{r}}{mc^2}\right)^2-1\right]. \qquad (30)$$

**7.** Utilisons maintenant les raisonnements de M. Sommerfeld[1].

Dans l'équation (30) *les coordonnées* $r$, $\phi$ *se séparent*. Puisque $\phi$ est cyclique, nous avons

$$\frac{\partial S}{\partial \phi}=\text{const.}=p\,;$$

et la condition des quanta nous donne

$$2\pi p=nh,$$

$h$ étant la constante de Planck et $n$ un nombre entier quelconque. Par suite, on obtient

$$\frac{\partial S}{\partial \phi}=\frac{nh}{2\pi}.$$

L'équation (30) devient alors

$$f^2\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2=m^2c^2\left[\frac{1}{f^2}\left(1+\frac{W+\dfrac{eE}{r}}{mc^2}\right)^2-1\right]-\frac{n^2h^2}{4\pi^2r^2},$$

ce qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{\partial S}{\partial r}=\sqrt{A+2\,\frac{B}{r}+\frac{C}{r^2}+\frac{D}{r^3}+\cdots\cdots}\,; \tag{31}$$

et en considérant

$$f^2=1-\frac{2kM}{c^2}\,\frac{1}{r}+\frac{kE^2}{c^4}\,\frac{1}{r^2},$$

nous trouvons

$$B=B'+\varDelta B,\quad C=C'+\varDelta C,\quad D=D'+\varDelta D,\quad \cdots\cdots,$$

$$A=2mW+\frac{W^2}{c^2},\qquad B'=meE\left(1+\frac{W}{mc^2}\right),$$

$$C'=-\frac{n^2h^2}{4\pi^2}+\frac{e^2E^2}{c^2},\qquad D'=-\frac{4k^2Mm^2E^2}{c^4}\left(1+\frac{W}{mc^2}\right)^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\,;$$

$$\varDelta B=kMm\left(1+\frac{W}{mc^2}\right)^2+\frac{2kMmW}{c^2}+\frac{kMW^2}{c^4},$$

$$\varDelta C=\frac{8kMmEe}{c^2}\left(1+\frac{W}{mc^2}\right)+\frac{4k^2M^2m+4k^2M^2m^2-kE^2m^2}{c^2}\left(1+\frac{W}{mc^2}\right)^2$$
$$+\frac{kW}{c^4}(4kM^2-E^2)\left(2m+\frac{W}{c^2}\right),$$

$$\varDelta D=-\frac{8k^3M^2m^2}{c^4}\left(1+\frac{W}{mc^2}\right)^2+\cdots\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(1) A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, 3e éd. (1922), 736 et 670.



On sait que

$$1+\frac{W}{mc^2}=\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{E}{e}\right)^2},\qquad \left(\alpha=\frac{2\pi e^2}{hc}\right) \tag{32}$$

approximativement[1] et la quantité $\dfrac{\alpha^2}{n^2}\left(\dfrac{E}{e}\right)^2$ est très petite. On peut montrer que

$$\left|\frac{\varDelta B}{meE}\right|<10^{-12}.$$

Car, si l'on remaque que

$$c=3\times10^{10},\qquad h=6{,}55\times10^{-27},\qquad k=6{,}7\times10^{-8},\qquad e=4{,}774\times10^{-10},$$
$$m=9{,}00\times10^{-28},\qquad M=1{,}652\times10^{-24},\qquad E=Ne\,(N=1,\ 2,\ \cdots\cdots),$$

on a

$$\frac{kM}{eE}<\frac{7}{11N}\times10^{-12},$$

$$\left|\frac{kMW}{c^2eE}\right|=\left|\frac{kMm}{eE}\cdot\frac{W}{mc^2}\right|<\frac{kMm}{eE}<10^{-19},$$

$$\frac{kMW^2}{meEc^4}=\frac{kMm}{eE}\left(\frac{W}{mc^2}\right)^2<10^{-39}.$$

Nous pouvons donc prendre $B'$ au lieu de $B$. De même, il est possible de prendre $C'$, $D'$, $\cdots\cdots$ au lieu de $C$, $D$, $\cdots\cdots$ respectivement.

*Pour l'atome semblable à l'hydrogène*, il suffit de prendre, au plus, les quatre termes de la série dans l'équation (31). Par conséquent, nous obtenons

$$\frac{\partial S}{\partial r}=\sqrt{A+2\,\frac{B'}{r}+\frac{C'}{r^2}+\frac{D'}{r^3}}\,;$$

et la condition des quanta correspondante à la variable $r$ devient

$$-2\pi\sqrt{-1}\left(\sqrt{C'}-\frac{B'}{\sqrt{A}}-\frac{B'D'}{2C'\sqrt{C'}}\right)=n'h, \tag{33}$$

$n'$ étant un nombre entier quelconque. Mais, d'après (32), on peut montrer que le terme $\dfrac{B'D'}{C'\sqrt{C'}}$ est très petit par rapport à $\sqrt{C'}$ et à $\dfrac{B'}{\sqrt{A'}}$; nous avons donc

$$-2\pi\sqrt{-1}\left(\sqrt{C'}-\frac{B'}{\sqrt{A}}\right)=n'h \tag{34}$$

au lieu de (33). C'est précisément la formule de M. Sommerfeld.

(1) Sommerfeld, ibid, 577.

Ainsi, nous sommes arrivés à la conclusion suivante : *L'influence de la gravitation est pratiquement négligeable pour la formule de Sommerfeld dans la théorie des spéctres (obtenue en partant de la théorie de la relativité restreinte).*

Institut Shiomi, Ôsaka.